

Schwierige Integrale
Aufgabensammlung
Höheres Niveau

Über 100 Integrale

Text 48061

Stand 22. Mai.2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

- Datei Nr. 48011 Teil 1 Einführung in die Grundlagen:
Änderungen und Differenziale
Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen
Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff
Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
- Datei Nr. 48012 Teil 2: Integrationsregeln
Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
- Datei Nr. 48013 Teil 3 Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
- Datei Nr. 48014 Teil 4 Integration von Wurzelfunktionen (1)
- Datei Nr. 48030 Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft
Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
- Datei Nr. 48015 Teil 5 Partielle Integration: alles
- Datei Nr. 45041 Teil 6 Exponentialfunktionen alles
- Datei Nr. 46041 Teil 7 Ln-Funktionen alles
- Datei Nr. 48016 Teil 8 Trigonometrische Funktionen alles
- Datei Nr. 48040 Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

- Datei Nr. 48050 Integrationsmethoden - Übersicht
- Datei Nr. 48051 Integration mit Partialbruchzerlegung
- Datei Nr. 48052 Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
- Datei Nr. 48055 Integration mit arctan-Funktionen
- Datei Nr. 48060 Sammlung schwerer Integrale
- Datei Nr. 48056 Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
- Datei Nr. 48070 Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
- Datei Nr. 48057 Integration der Arkusfunktionen
- Datei Nr. 48061 Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Inhalt

Abkürzungen: PBZ = Partialbruchzerlegung, Pint = Partielle Integration,

1. Integration von Exponentialfunktionen

Aufgabe	Ergebnis	Methode	
1.1 $\int x \cdot e^{-2x} dx$	$-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C$	Pint	S.11
1.2 $\int \frac{(x+2)}{e^{x+1}} dx$	$-(x+3)e^{-x-1} + C$	Pint	
1.3 $\int (e^{2x} - 4) \cdot e^{2x} dx$	$\frac{1}{4}(e^{2x} - 4)^2 + C$	Substitution	
1.4 $\int (1+x^2) e^{\frac{1}{2}x^2} dx$	$= x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + C$	Pint	
1.5 $\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$	$= e - 5e^{-1}$	Pint	
1.6 $\int e^{\sqrt{x}} dx$	$= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$	Substitution und Pint	
1.7 $\int e^{\sqrt{x+1}} dx$	$= 2(\sqrt{x+1}-1)e^{\sqrt{x+1}} + C$	Substitution und Pint	
1.8 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	$= 2e(e-1) \approx 9,34$	Substitution	
1.9 $\int \frac{2^{x-1}}{\sqrt{2^x+1}} dx$	$\dots = \frac{1}{\ln 2} \cdot \sqrt{2^x+1} + C$	Substitution	S.14
1.10 $A(r) = \int_1^r \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = e^{-2}$	Substitution	
1.11 $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$	$= \ln \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}} \approx 0,313$	Substitution	
1.12 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$	$x - \ln(1+e^x) + C$	Substitution und Pint	
1.13 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	$= \arctan(e^x) + C$	Substitution	
1.14 $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln \left \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right + C$	Substitution und PBZ	
1.15 $\int_1^2 \frac{1}{e^x + 2e} dx$	$\frac{1}{2e} \cdot \left(1 - \ln \frac{e+2}{3} \right)$	Substitution und PBZ	
1.16 $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x + 2e} dx$	$= e^2 - e - 2e \cdot \ln \frac{e+2}{3}$	Substitution	

1.17	$\int \frac{e^x - \sin(x)}{e^{2x}} dx$	$-\frac{2\sin(x) + \cos(x)}{5e^{2x}} + C$	Zweimal Pint	S.19
1.18	$\int \frac{1}{e^{2x} - 4} dx$	$= \frac{1}{8} \cdot \ln 1 - 4 \cdot e^{-2x} + C$	Substitution und PBZ	
1.19	$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{2e^{-x} - 1} dx$	$= \frac{1}{2} \cdot [\ln 2u - 1]_1^e = \frac{1}{2} \cdot [\ln(2e - 1) - \ln(1)] = -\frac{1}{2} \cdot \ln(2e - 1)$	Subst.	
1.20	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$	$= \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$	Substitution und PBZ	
1.21	$\int \frac{3e^x + 4e^{-x} + 2}{1 - e^{2x}} dx$	$= 2x - 4e^{-x} + 4,5 \cdot \ln 1 - e^x + 2,5 \cdot \ln(1 + e^x) + C$	Subst. und PBZ	

2. Integration von trigonometrischen Funktionen

2.1	$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$	$= \frac{1}{3}$	Substitution	S.23
2.2	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\sin(x) + 1} \cdot \cos(x) dx$	$\frac{4}{3}\sqrt{2}$	Substitution	
2.3	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos x + \cos^2 x} dx$	$2 \ln 2$	Substitution	
2.4	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$	2	Substitution	
2.5	$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} dx$	$4\sqrt{2}$	Versch. Methoden (2 Lösungen)	
2.6	$\int \sin^4(t) dt$	$= -\frac{1}{4}\sin^3(t) \cdot \cos(t) - \frac{3}{8}\sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{3}{8}t$	Pint	
2.7	$\int \sin^6(t) dt$	$= -\sin^5(t) \cdot \cos(t) - \frac{5}{24}\sin^3(t) \cdot \cos(t) - \frac{5}{16}\sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{5}{16}t$	Pint.	
2.8	$\int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x}) dx$	2	Pint	S.27
2.9	$\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) dx$	$= \frac{\pi - 2}{8}\sqrt{2}$	Pint	
2.10	$\int (\sin(x) + \cos(x))^2 dx$	$= x + \sin^2(x) + K$	Umformungstricks	
2.11	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x+1)^2 \cdot \sin(x) dx$	$= 4$	zweimal Pint	

2.12	$\int x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos^2(x^2) dx$	$= -\frac{1}{6} \cdot \cos^3(x^2) + C$	Substitution	S.29
2.13	$\int_0^{\sqrt{\pi+4}} x \cdot \cos(x^2 - 4) dx$	$= 0$	Substitution	
2.14	$\int \sin(\ln(x)) dx$	$= \frac{1}{2} x \cdot [\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))] + C$	Subst. und Pint.	
2.15	$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$	$= \sin(1)$	Substitution	
2.16	$\int \cos(\ln(x)) dx$	$\frac{1}{2} x \cdot [\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))]$	Pint	
2.17	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) dx}{\sin^2(x) + 4}$	$\dots = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$	zweimal substituieren.	
2.18	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) dx}{1 + \sin(x)}$	$\ln 2$	Substitution	
2.19	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{1 - \sin(x)} dx$	$= \frac{3}{2}$	Substitution	
2.20	$\int \frac{1}{\cos(x)} dx$	$= \frac{1}{2} \cdot \ln \left \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right + C$	(3 Lösungen)	
2.21	$\int \frac{1}{\sin(x)} dx$	$= \ln \tan(x) + \sec(x) + C$	(3 Lösungen)	S.34
2.22	$\int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$	2	Umformungstricks und Substitution.	
2.23	$\int \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{1 - \sin(x)} dx$	$= -\ln(1 - \sin(x)) - \sin(x) + K$	Substitution	
2.24	$\int \frac{1 - 2\sin^2(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$	$= \sin(x) + \cos(x) + C$		
2.25	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 4} dx$	$\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$	zweimal Substitution	
2.26	$\int \frac{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}{(\cos^3(x) + \sin^3(x))^2} dx$	$= -\frac{1}{3(1 + \tan^3(x))} + C$	zweimal Substitution	
2.27	$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 \sin^2(x) + b^2 \cos^2(x)} dx$	$= \frac{\pi}{2ab}$	zweimal Substitution	
2.28	$\int \frac{x}{\tan(x^2)} dx$	$= \frac{1}{2} \cdot \ln(\sin(x^2)) + C$	zweimal Substitution	
2.29	$\int_{-10\pi}^{20\pi} \sqrt{1 - \sin^2(x)} dx$	60	Trick!	

3. Integration von gebrochen rationalen Funktionen

- 3.1 $\int_3^7 \frac{x+1}{x-1} dx$ $= 4 + \ln 9$ Substitution S.41
- 3.2 $\int \frac{1}{2x^2 + \frac{1}{2}} dx$ $= \arctan(2x) + C$ Umformungstricks, Subst.
- 3.3 $\int \frac{1}{2x^2 + 4x + 10} dx$ $= \frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ Umformungstricks, Subst.
- 3.4 $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$ $= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$ PBZ
- 3.5 $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^2}{4 + x^2} dx$ $= 2 + \frac{1}{4}\pi$
- 3.6 $\int_2^4 \frac{2x^3 + 3}{x^3 - x} dx$ $\dots = 4 + 3 \cdot \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln 5 + 2 \ln 3 \approx 4,92$ Poldiv, PBZ
- 3.7 $\int_1^2 \frac{1 + 4x^3}{x + x^4} dx$ $= \ln(9)$ Substitution
- 3.8 $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$ $= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{2x-3}{2(x-1)^2} + K$ PBZ S.45
- 3.9 $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 5x + 6} dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x+3| + C$ Poldiv, PBZ.
- 3.10 $\int \frac{x^2 + 3}{(x+1)^2(x^2 + 3x + 4)} dx$ $= -2 \cdot \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + \ln(x^2 + 3x + 4) + C$ PBZ
- 3.11a $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(x-a)} dx$ $\frac{a}{2}$ Substitution
- 3.11b $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x) - \cos(x)} dx$ $= \frac{\pi}{4}$ Anwendung von 3.11a
- 3.12 $\int_4^8 \frac{3x^3 - 6x^2 + 50x - 81}{(x-1)^2 \cdot (x^2 + 16)} dx$ 2,08 PBZ S.50
- 3.13 $\int_1^3 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 \cdot (2x^2 + x + 5)} dx$ $= \ln(3) + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{13}{4} - \frac{10}{\sqrt{39}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{13}{\sqrt{39}}\right) - \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right) \right]$ PBZ
- 3.14 $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$ $= \frac{1}{2} \cdot \ln|1-x| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x| - x + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C = \ln \sqrt{\left| \frac{1-x}{1+x} \right|} - x + C$
- 3.15 $\int \frac{x^2}{x^4 - 6x^2 + 25} dx$ $= \frac{1}{16} \cdot \ln \left| \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right| + \frac{1}{4} \cdot \arctan(x-2) + \frac{1}{4} \cdot \arctan(x+2) + C$ S.55

4. Integration von Wurzelfunktionen

- 4.1 $\int_0^4 x\sqrt{2x+1} \, dx = \frac{298}{15}$ Substitution (2 Wege) S.58
- 4.2 $\int_0^5 x^3 \cdot \sqrt{x^2+4} \, dx = 701,8$ Subst.
- 4.3 $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \, dx = 2\sqrt{2} - 2 \cdot \ln(1+\sqrt{2}) - 2 + 2 \cdot \ln 2$ (FE) Subst.
- 4.4 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \sqrt{x^2+4} - 2 \right| - \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \sqrt{x^2+4} + 2 \right| + C$
 $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{x}\right) + C$ 3 Lösungswege
- 4.5 $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \, dx = \sqrt{x^2+4} + \ln \left(\left| \sqrt{x^2+4} - 2 \right| \right) - \ln \left(\sqrt{x^2+4} + 2 \right) + C$
 $= \sqrt{x^2+4} + \ln \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+4} + 2} + C = \sqrt{x^2+4} + 2 \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} + C$
- 4.6 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \pi$ Subst. und Pint S. 62
- 4.7 $\int_1^x \frac{t - \sqrt{t}}{t + \sqrt{t}} \, dt = x - 4\sqrt{x} + 4 \cdot \ln(\sqrt{x} + 1) + 3 - 4 \cdot \ln 2$ Subst.
- 4.8 $\int_0^2 \frac{3x}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = 9 - 3\sqrt{5}$ Substitution
- 4.9 $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx = \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)\sqrt{x+1}$ Substitution
- 4.10 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

5. Integration von Logarithmusfunktionen

- 5.1 $\int (x+2) \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 - 2x + C$ Pint S.66
- 5.2 $\int \ln(x^2 - 1) \, dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) + \ln \frac{x+1}{x-1} + 2x + C$ Substitution
- 5.3 $\int_{-1}^0 (x+2) \cdot (\ln(x+2))^2 \, dx = 2 \cdot (\ln 2)^2 - \ln 4 + \frac{3}{4} \approx 0,325$ Subst. und zweimal Pint
- 5.4 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2)$ Pint
- 5.5 $\int_1^e \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1 + \ln^2(x)}} \, dx = \sqrt{2} - 1$ Subst
- 5.6 $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x \cdot (\ln^2(x) - \ln(x) + 1)} \, dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ Subst
- 5.7 $\int_1^2 x \cdot \ln(x^2 + 2) \, dx = 3 \cdot \ln(6) - \frac{3}{2} \cdot \ln(3) - \frac{3}{2}$ Pint
- 5.8 $\int_1^e \frac{dx}{x + x \cdot \ln(x)} = \ln(2)$ Subst
- 5.9 $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \, dx = \ln(x) \cdot \ln(\ln(x)) - \ln(x) + C$ Subst

6. Integration von hyperbolischen Funktionen

- 6.1 $\int x \cdot \sinh(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \cosh(x^2) + C$ Substitution S.69
- 6.2 $\int x \cdot \sinh(x) \, dx = x \cdot \cosh(x) - \sinh(x) + C$ Pint
- 6.3 $\int_0^1 x^2 \cdot \cosh(x) \, dx$ 2-mal Pint
- 6.4 $\int \sin(x) \cdot \sinh(x) \, dx$ 2-mal Pint
- 6.5 $\int \cos(x) \cdot \cosh(x) \, dx$ 2-mal Pint
- 6.6 $\int \sin(x) \cdot \cosh(x) \, dx$ 2-mal Pint
- 6.7 $\int \cos(x) \cdot \sinh(x) \, dx$ 2-mal Pint

7. Integration von Betragsfunktionen

7.1 Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = |x-1| + 1$

S.71

8. Integration von Arcusfunktionen

8.1 $\int \frac{4x \cdot \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $-4\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin(x^2) + 8\sqrt{1+x^2} + C$ Pint und Substitution S.72

8.2 $\int \frac{4x \cdot \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx$ $= \arcsin^2(x^2) + C$ Substitution

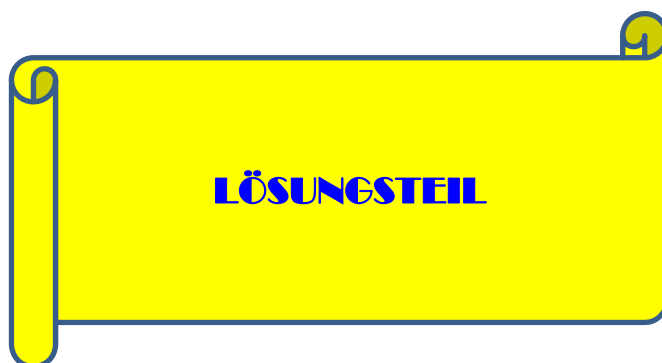
8.3 $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$ $= (x+1) \cdot \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$ Pint und Substitution.

8.4 $\int x \cdot \arccos(x) dx$ $= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arccos(x) + \frac{1}{4}\arcsin(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$ Pint, Subst.

8.5 $\int x \cdot \arccos(\sqrt{1-x^2}) dx$ $= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arccos(\sqrt{1-x^2}) - \frac{1}{4} \cdot \arcsin(x) + \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{1-x^2}$ Pint

8.6 $\int \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2} dx$ $\frac{1}{3} \cdot (\arctan(x))^3 + C$ Substitution

8.7 $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\arcsin^2(x) + C$ Substitution



auf der Mathematik-CD